Regra de três simples e composta

Objetivo
Aprender a utilizar a regra de três para cálculos de proporção entre duas ou mais grandezas.

Se liga
Para essa aula, você vai precisar saber o que são grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Caso queira recordar, você pode assistir uma aula sobre clicando **aqui**, caso não seja redirecionado automaticamente para a aula, busque por "Grandezas diretamente e inversamente proporcionais" na nossa biblioteca.

Curiosidade
Você sabia que no canal do descomplica do youtube nós temos um "quer que desenhe" incrível resumindo sobre o conteúdo de regra de três simples? Dê uma conferida clicando **aqui**.

Teoria

Na aula passada, vimos como relacionar grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Agora, vamos aplicar tais estratégias em contextos que envolvem duas ou mais grandezas, especificamente em casos em que um de seus valores é desconhecido.

Regra de três simples
Elas envolvem apenas duas grandezas. Nesse caso, podemos analisar as grandezas envolvidas da seguinte forma:

- $1^{\underline{o}}$ **passo**: identificar as grandezas envolvidas nos cenários do problema, perceber se são diretamente ou inversamente proporcionais e atribuir uma incógnita para o valor desconhecido.
- $2^{\underline{o}}$ **passo:** montar a proporção entre as grandezas (mantendo ou invertendo as razões, a depender se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais, respectivamente) e efetuar os cálculos necessários.

Exemplo: Uma confeiteira produz 100 brigadeiros com 4 latas de leite condensado. Determine quantos brigadeiros serão produzidos com 10 latas de leite condensado.

$1^{\underline{o}}$ **passo:** Determinando as grandezas e avaliado suas relações de porporcionalidade.

Valores das grandezas:
- Número de brigadeiros $(100, x)$
- Latas de leite condensado $(4, 10)$

As grandezas quantidade de brigadeiros e quantidade de latas de leite condensado são diretamente proporcionais, uma vez que, quanto mais latas produzidas, maior é o número de brigadeiros produzidos.
$2^{\underline{o}}$ passo: Como as grandezas são dretamente proporcionais, não precisamos inverter as razões associadas a cada uma delas. Assim, seguimos com a proporção:

$$\frac{100}{x} = \frac{4}{10} \Rightarrow 4x = 1000 \Rightarrow x = 250$$

Logo, serão produzidos 250 brigadeiros.

Vamos de mais um exemplo?

Exemplo: Um grupo de 5 professores levou 12 dias para preparar uma avaliação da escola onde trabalham. Considerando que todos os professores têm a mesma produtividade e velocidade de trabalho, quantos dias serão necessários para que 30 professores preparem essa mesma avaliação?

$1^{\underline{o}}$ passo: Determinando as grandezas e avaliado suas relações de porporcionalidade.

Valores das grandezas:
- Professores $(5, 30)$
- Tempo $(12, x)$

As grandezas "número de professores" e "tempo" são inversamente proporcionais, uma vez que, quanto mais professores trabalhando na tarefa, menos tempo será necessário para completá-la.

$2^{\underline{o}}$ passo: Como as grandezas são inversamente proporcionais, deve-se inverter uma das razões. Repare que, na resolução a seguir, será invertida a segunda fração.

$$\frac{5}{30} = \frac{x}{12} \Rightarrow 5 \cdot 12 = 30x \Rightarrow x = \frac{60}{30} = 2$$

Assim, serão necessários 2 dias para que 30 professores preparem a avaliação.

Regra de três composta

A regra de três composta se diferencia da regra de três simples pela quantidade de grandezas envolvidas na situação-problema. Enquanto na regra de três simples apenas duas grandezas são relacionadas, as técnicas de resolução para regra de três composta se adequam para qualquer quantidade de grandezas. Para solucionar um problema com três ou mais grandezas proporcionais, deve-se aplicar o seguinte passo a passo:

- **$1^{\underline{o}}$ passo**: identificar as grandezas envolvidas no problema, em especial a grandeza prioritária (à qual atribuiremos uma variável para seu valor desconhecido);
- **$2^{\underline{o}}$ passo**: determinar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais à grandeza prioritária;
- **$3^{\underline{o}}$ passo**: montar uma proporção onde se igualam a razão entre os valores da grandeza prioritária de um lado e o produto entre as demais grandezas (mantendo ou invertendo cada fração, a depender se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais à grandeza prioritária, respectivamente) do outro. Por fim, efetuar os cálculos necessários.

Exemplo: Em uma fábrica, duas máquinas carregam cinco caminhões em $2{,}5$ horas. Supondo que o rendimento das máquinas se mantenha constante nessa fábrica, determine quanto tempo será gasto para dez dessas máquinas carregarem 60 caminhões.

$1^{\underline{o}}$ **passo:** Determinando as grandezas.

- Tempo $(2{,}5\ /\ x)$ → grandeza prioritária
- Máquinas $(2\ /\ 10)$
- Caminhões $(5\ /\ 60)$

$2^{\underline{o}}$ **passo:** avaliado suas relações de porporcionalidade.

- "Tempo" e "máquinas" são inversamente proporcionais, pois, quanto mais máquinas, menos tempo elas levam para encher os caminhões.
- "Tempo" e "caminhões" são diretamente proporcionais, pois, quanto mais caminhões precisam ser abastecidos, maior é tempo para enchê-los.

$3^{\underline{o}}$ **passo:**

Usualmente, montamos uma tabela com os dados do enunciado, usando setas de mesmo sentido para representarmos grandezas diretamente proporcionais e setas em sentidos opostos para expressar grandezas inversamente proporcionais. Isto é visto abaixo.

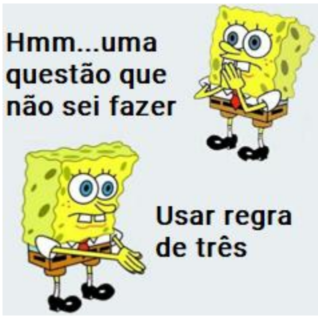
Tempo (horas) ↑	Máquinas ↓	Caminhões ↑
$2{,}5$	2	5
x	10	60

Devemos inverter a razão do número de máquinas (por ser inversamente porporcional ao tempo) e manter a de caminhões (por ser diretamente proporcional ao tempo) ao fazer a proporção:

$$\frac{2{,}5}{x} = \frac{10}{2} \cdot \frac{5}{60} \rightarrow \frac{2{,}5}{x} = \frac{50}{120} \rightarrow \frac{2{,}5}{x} = \frac{5}{12} \rightarrow x = 6 \text{ horas}$$

Logo, levar-se-ia (mesóclise bonita, né?) 6 horas.

Regra de três é ótimo, não é? Quase uma benção. Só cuidado para não ter a lógica como a ao lado! É verdade que a regra de três aparece em muitos vestibulares e questões (no Enem então, nem se fala!). Porém, só devemos usá-la em problemas com grandezas proporcionais (direta ou inversamente)! Ou seja, em que, ao aumentarmos um grandeza, a outra aumenta/diminui na mesma proporção/na proporção inversa – se uma dobra, a outra dobra (exemplo do caso de diretamente porporcionais), se uma triplica, a outra cai pela terça parte (exemplo do caso de inversamente proporcionais).



Exercícios de fixação

1. Uma empresa consegue colocar 420 doces dentro de 6 caixas. Quantos doces cabem em 10 caixas?

a) 600

b) 660

c) 700

d) 760

2. Quatro carros transportam 16 pessoas. Para transportar 320 pessoas, quantos carros iguais a esses seriam necessários?

a) 20

b) 40

c) 80

d) 160

3. Uma moto percorre $240\ km$ utilizando 20 litros de gasolina. Quantos litros ela precisa para percorrer $360\ km$?

a) 30 litros.

b) 28 litros.

c) 26 litros.

d) 24 litros.

4. Em uma fábrica de perfumes, 3 máquinas produzem 900 perfumes em 12 dias. Quantos dias serão necessários para 8 máquinas produzirem 1200 perfumes?

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

5. Uma lanchonete produz 480 sanduíches em 6 dias quando 4 funcionários estão trabalhando. Quantos funcionários são necessários para que essa lanchonete faça 600 sanduíches em 4 dias?

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

Exercícios de vestibulares

1. Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

I. Recipiente I: $0{,}125$ litro;
II. Recipiente II: $0{,}250$ litro;
III. Recipiente III: $0{,}320$ litro;
IV. Recipiente IV: $0{,}500$ litro;
V. Recipiente V: $0{,}800$ litro.

O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez. Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

2. Um motociclista planeja realizar uma viagem cujo destino fica a $500\ km$ de sua casa. Sua moto consome 5 litros de gasolina para cada $100\ km$ rodados, e o tanque da moto tem capacidade para 22 litros. Pelo mapa, observou que no trajeto da viagem o último posto disponível para reabastecimento, chamado Estrela, fica a $80\ km$ do seu destino. Ele pretende partir com o tanque da moto cheio e planeja fazer somente duas paradas para reabastecimento, uma na ida e outra na volta, ambas no posto Estrela. No reabastecimento para a viagem de ida, deve considerar também combustível suficiente para se deslocar por $200\ km$ no seu destino. A quantidade mínima de combustível, em litro, que esse motociclista deve reabastecer no posto Estrela na viagem de ida, que seja suficiente para fazer o segundo reabastecimento, é

a) 13.
b) 14.
c) 17.
d) 18.
e) 21.

3. Uma fábrica de calçados, localizada em Nova Serrana, emprega 16 operários, os quais produzem 120 pares de calçados em 8 horas de trabalho diárias. A fim de ampliar essa produção para 300 pares por dia, a empresa mudou a jornada de trabalho para 10 horas diárias. Nesse novo contexto, o número de operários será igual a:

a) $16.$

b) $24.$

c) $32.$

d) $48.$

e) $50.$

4. Um banco de sangue recebe $450\ mL$ de sangue de cada doador. Após separar o plasma sanguíneo das hemácias, o primeiro é armazenado em bolsas de $250\ mL$ de capacidade. O banco de sangue aluga refrigeradores de uma empresa para estocagem das bolsas de plasma, segundo a sua necessidade. Cada refrigerador tem uma capacidade de estocagem de 50 bolsas. Ao longo de uma semana, 100 pessoas doaram sangue àquele banco. Admita que, de cada $60\ mL$ de sangue, extraem-se $40\ mL$ de plasma. O número mínimo de congeladores que o banco precisou alugar, para estocar todas as bolsas de plasma dessa semana, foi

a) 2

b) 3

c) 4

d) 6

e) 8

5. Muitos modelos atuais de veículos possuem computador de bordo. Os computadores informam em uma tela diversas variações de grandezas associadas ao desempenho do carro, dentre elas o consumo médio de combustível. Um veículo, de um determinado modelo, pode vir munido de um dos dois tipos de computadores de bordo:

- Tipo A: informa a quantidade X de litro de combustível gasto para percorrer 100 quilômetros
- Tipo B: informa a quantidade de quilômetro que o veículo é capaz de percorrer com um litro de combustível.

Um veículo utiliza o computador do Tipo A, e ao final de uma viagem o condutor viu apresentada na tela a informação "$X/100$".

Caso o seu veículo utilizasse o computador do Tipo B, o valor informado na tela seria obtido pela operação

a) $x \cdot 100$

b) $\frac{x}{100}$

c) $\frac{100}{x}$

d) $\frac{1}{x}$

e) $1 \cdot x$

6. Em uma agência bancária, dois caixas atendem em média seis clientes em 10 minutos. Considere que, nesta agência, todos os caixas trabalham com a mesma eficiência e que a média citada sempre é mantida. Assim, o tempo médio necessário para que cinco caixas atendam 45 clientes é de:

a) 45 minutos;

b) 30 minutos;

c) 20 minutos;

d) 15 minutos;

e) 10 minutos.

7. Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando $12\ kg$ de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

a) 920 kg.

b) 800 kg.

c) 720 kg.

d) 600 kg.

e) 570 kg.

8. Uma obra será executada por 13 operários (de mesma capacidade de trabalho) trabalhando durante 11 dias com jornada de trabalho de 6 horas por dia. Decorridos 8 dias do início da obra 3 operários adoeceram e a obra deverá ser concluída pelos operários restantes no prazo estabelecido anteriormente. Qual deverá ser a jornada diária de trabalho dos operários restantes nos dias que faltam para a conclusão da obra no prazo previsto?

a) 7h 42 min

b) 7h 44 min

c) 7h 46 min

d) 7h 48 min

e) 7h 50 min

9. Um paciente necessita de reidratação endovenosa feita por meio de cinco frascos de soro durante $24\ h$. Cada frasco tem um volume de $800\ mL$ de soro. Nas primeiras quatro horas, deverá receber 40% do total a ser aplicado. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas. O número de gotas por minuto que o paciente deverá receber após as quatro primeiras horas será

a) $16.$
b) $20.$
c) $24.$
d) $34.$
e) $40.$

10. Numa gráfica existem 3 impressoras off set que funcionam ininterruptamente, 10 horas por dia, durante 4 dias, imprimindo $240\,000$ folhas. Tendo-se quebrado umas das impressoras e necessitando-se imprimir, em 6 dias, $480\,000$ folhas, quantas horas por dia deverão funcionar ininterruptamente as duas máquinas restantes?

a) 20
b) 8
c) 15
d) 10
e) 8

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. **C**

Se tivermos mais caixas, então teremos mais doces, logo as grandezas são diretamente proporcionais:
$420 - 6$
$x - 10$

Agora, basta multiplicarmos cruzado:
$6x = 420 \cdot 10 \Rightarrow 6x = 4200 \Rightarrow x = \frac{4200}{6} \Rightarrow x = 700$

2. **C**

As grandezas são diretamente proporcionais:
$4 - 16$
$x - 320$

Multiplicando cruzado, temos
$16x = 4 \cdot 320 \rightarrow 16x = 1280$
$x = \frac{1280}{16}$
$x = 80$

3. **A**

As grandezas são diretamente proporcionais, logo multiplicamos cruzado:
$240 - 20$
$360 - x$

Multiplicando cruzado, temos
$240x = 20 \cdot 360 \rightarrow 240x = 7200$
$$x = \frac{7200}{240} \rightarrow x = 30$$

4. **C**

As grandezas são: quantidade de máquinas, quantiadde de perfumes e tempo em dias.
$3 - 900 - 12$
$8 - 1200 - x$

Tomando o tempo como referencial, temos que a quantidade de máquinas é inversamente proporcional e a quantidade de perfumes é diretamente proporcional. Logo, teremos:
$8 - 900 - 12$
$3 - 1200 - x$

Calculando, temos:
$$\frac{12}{x} = \frac{8}{3} \cdot \frac{900}{1200}$$
$$\frac{12}{x} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4}$$
$$\frac{12}{x} = \frac{24}{12}$$
$24x = 144 \rightarrow x = 6$

5. **E**

Temos três grandezas: quantidade de sanduíches, tempo e quantidade de funcionários:
$480 - 6 - 4$
$600 - 4 - x$

Tomando a quantidade de funcionários como referencial, a quantidade de sanduíches é diretamente proporcional e o tempo é inversamente proporcional, logo teremos:
$480 - 4 - 4$
$600 - 6 - x$

Calculando, temos:
$\frac{4}{x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{480}{600} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{1920}{3600} \Rightarrow 14.400x = 1920x \Rightarrow x = 7,5$ ...

A questão pergunta quantos funcionários serão necessários. Com 7,5... funcionários o objetivo não é atingido, logo precisaremos de 8 funcionários.

Exercícios de vestibulares

1. **C**

Temos $\mathbf{16}$ galões, cada um contendo $\mathbf{4}$ litros de álcool em gel, assim teremos $\mathbf{16 \cdot 4 = 64}$ litros de álcool em gel. Como cada uma das $\mathbf{10}$ escolas receberá $\mathbf{20}$ recipientes, a capacidade de cada recipiente será de $\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{10 \cdot 20}} = \mathbf{0,32}$ litros.

2. **C**

O consumo da moto é igual a $\frac{100}{5} = 20km/L$.
De sua casa até o posto Estrela serão consumidos $\frac{420}{20} = 21$ litros de combustível.
Logo, restará $22 - 21 = 1$ litro no tanque.
O motociclista percorrerá $80\ km$ para chegar ao seu destino, $200\ km$ no destino e mais $80\ km$ para retornar ao posto Estrela, o que corresponde a $80 \cdot 2 + 200 = 360\ km$. Em consequência, ele precisará reabastecer, na ida, um total de $\frac{360}{20} - 1 = 17$ litros.

3. **C**

Operários e horas são inversamente proporcionais e operários e sapatos são diretamente proporcionais. Assim,

operário	horas	sapatos
16	8	240
x	10	600

$\frac{16}{x} = \frac{10}{8} \cdot \frac{240}{600} \Rightarrow x = 32$

4. **B**

Naquela semana, houve $450 \cdot 100\ ml$ de sangue. Logo,

60 ml (sangue) ---- 40 ml (plasma)
45000 ml ----------- x

Multiplicando cruzado, $60x = 40 \cdot 45000$, assim $x = 30000\ ml$ de plasma.
Dividindo por 250 temos $\frac{30000}{250} = 120$ bolsas e depois dividindo por 50 que é a capacidade do congelador temos $\frac{120}{50} = 2,4$. Assim, serão necessário mais de 2 congeladores, portanto 3 congeladores é a resposta.

5. C

O computador do tipo A indicou que foram gastos x litros para percorrer a distância de $100\ km$. Logo, sabendo que o consumo médio de um veículo é dado pela razão entre a distância percorrida e a quantidade de litros de combustível necessária para percorrer essa distância, segue que o consumo médio exibido pelo computador do tipo B é $\frac{100}{x}$.

6. B

O número de minutos é inversamente proporcional ao número de caixas e diretamente proporcional ao número de clientes. Assim, segue que:

clientes	caixas	minutos
6	2	10
45	5	x

$$\frac{10}{x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{45} \Rightarrow x = 30$$

7. A

Alunos	dias	Horas	Alimento (kg)
20	10	3	120
50	20	4	x

$$\frac{120}{20 \cdot 10 \cdot 3} = \frac{x}{50 \cdot 20 \cdot 4} \Leftrightarrow x = 800kg$$

Total arrecadado $= 800 + 120 = 920\ kg$

8. D

Aumentando o nº de horas por dia, diminui o número de dias. Inversamente proporcional. Aumentando o numero de horas por dia, diminui o numero de operários. Inversamente proporcional. Chamaremos o número de horas por dia de x e inverteremos as outras frações:

$$\frac{6}{x} = \frac{10}{13} \cdot \frac{11}{11}$$

$$x = 7{,}8$$

Transformando $0{,}8$ horas em minutos: $0{,}8 \cdot 60 = 48$

7 horas e 48 minutos.

9. C

O volume total é de $800\ mL \cdot 5 = 4000\ mL$. Nas primeiras 4 horas ele tomou 40% então para o resto sobram 60% de $4000 = 2400\ mL$. Como cada mL equivalem a 12 gotas, $2400\ mL$ equivalem $2400 \cdot 12 = 28800$ gotas e como 1 hora valem 60 minutos, 20 horas valem $20 \cdot 60 = 1200$. Assim dividindo 28800 por 1200 obtem-se 24 gotas por minuto.

10. A

Analisando as grandezas: horas/dia com dia é inversa, horas/dia com impressoras é inversa e horas/dia com folhas é direta

impres.	horas/dia	dias	folhas
3	10	4	240000
2	x	6	480000

$$\frac{10}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{240000}{480000} \Rightarrow x = 20$$